1ères Maths DS $n°2$ **samedi 18 janvier 2025** **Durée 2h00**

Calculatrice autorisée en **mode examen** **Total sur 20 points**

Exercice 1 [4 points]

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3}{x}$ et $a\in\,]0;+\infty[$.

1. a. Déterminer le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, $h\neq 0$ et $a+h>0$.

b. En déduire $f'(a)$.

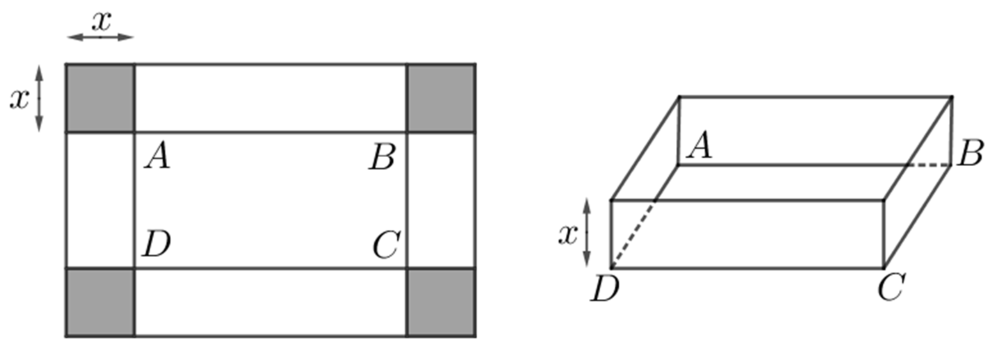
2. On souhaite retrouver $f'(a)$ par une autre méthode.

a. Déterminer $f'(x)$ où $x\in\,]0;+\infty[$.

b. En déduire $f'(a)$.

Exercice 2 [5 points] (un grand classique)

Pour réaliser une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle on dispose d'une feuille cartonnée rigide de dimensions $15\ cm$ par $8\ cm$: on découpe aux quatre coins de cette feuille quatre carrés identiques puis on replie le carton suivant les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$, on note x la longueur en cm du côté des carrés découpés :



1. Justifier que : $0\leqslant x\leqslant 4$.

2. Montrer que le volume $V(x)$ de la boîte en cm^3 s'exprime, pour tout $x\in[0;4]$, par :

$$V(x)=4x^3-46x^2+120x$$

3. Calculer $V'(x)$, en déduire les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0;4]$.

4. Pour quelles dimensions de la boîte, longueur, largeur et hauteur, son volume est-il maximal ? On donnera les valeurs exactes puis arrondies à 0,1 cm.

Quel est le volume maximal ? On donnera la valeur exacte puis arrondie à $0{,}1\ cm^3$.

Exercice 3 [4 points] (un grand classique)

Pour tout réel x, on pose $f(x)=x^3-4x^2+2x+3$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A.

3. Déterminer les coordonnées du point B appartenant à $\mathcal{C}_f$ et distinct de A, en lequel la tangente est parallèle à T.

<u>Exercice 4</u> [4 points] (un grand classique)
On admet que, pour tous réels a et b, on a :

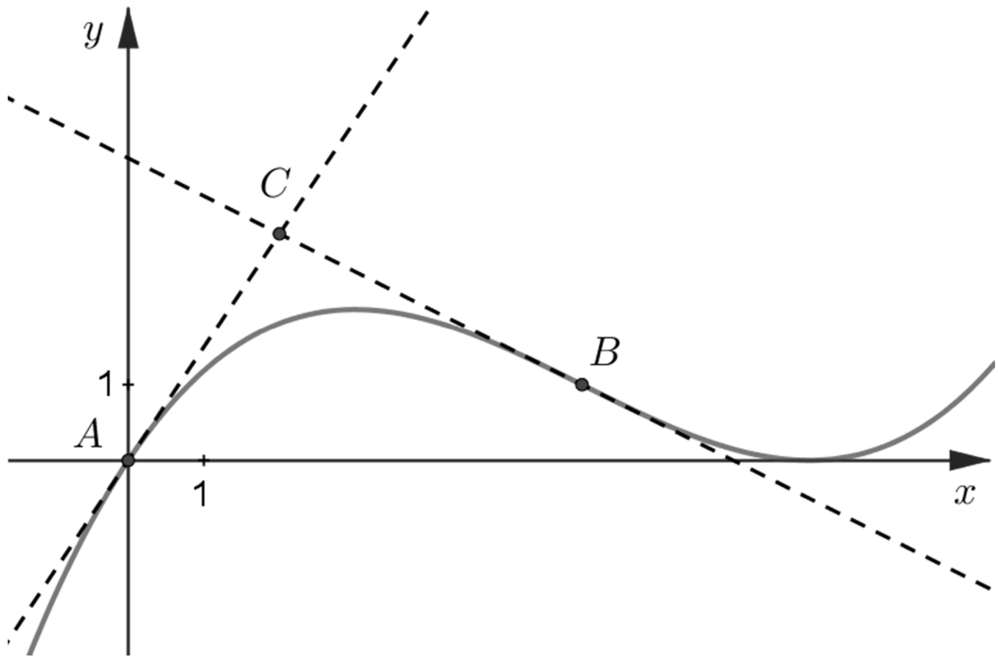
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

1. Montrer que, pour tout réel x, on a : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.
2. En déduire que, pour tout réel x, on a :

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

3. Donner la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

<u>Exercice 5</u> [3 points] (un grand classique)
On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et on donne $A(0;0)$, $B(6;1)$ et $C(2;3)$.
On précise que les points A et B appartiennent à $\mathcal{C}_f$ et que les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en A et B sont respectivement les droites (AC) et (BC) :



1. Justifier que $d = 0$.
2. Déterminer les coefficients a, b et c.
3. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses (tangente « horizontale »).

Corrigé thiaude

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3}{x}$ et $a\in]0;+\infty[$.

1. a. Déterminer le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, $h\neq 0$ et $a+h>0$.

On a :

$$f(a)=\frac{3}{a}\ \ et\ \ f(a+h)=\frac{3}{a+h}$$

donc :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{3}{a+h}-\frac{3}{a}}{h}=\frac{\frac{3a}{a(a+h)}-\frac{3(a+h)}{a(a+h)}}{h}=\frac{\frac{3a-3(a+h)}{a(a+h)}}{h}=\frac{3a-3a-3h}{a(a+h)}\times\frac{1}{h}$$
$$=\frac{-3h\times 1}{a(a+h)\times h}=\frac{-3}{a(a+h)}$$

On a donc :

$$\boldsymbol{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{-3}{a(a+h)}}$$

b. En déduire $f'(a)$.

$$f'(a)\overset{\text{def}}{=}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-3}{a(a+h)}=\frac{-3}{a^2}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{f'(a)=\frac{-3}{a^2}}$$

On souhaite retrouver par une autre méthode $f'(a)$.

a. Déterminer $f'(x)$, $x\neq 0$.

$f(x)=\dfrac{3}{x}$

Rappel : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

$f'(x)=\dfrac{0(x)-1(3)}{x^2}$

$\boldsymbol{f'(x)=\dfrac{-3}{x^2}}$

b. En déduire $f'(a)$.

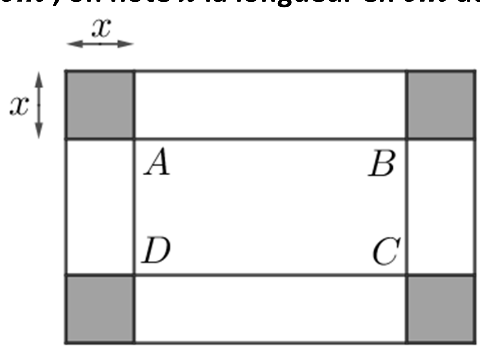
En remplaçant x par a dans $f'(x)$, on obtient :

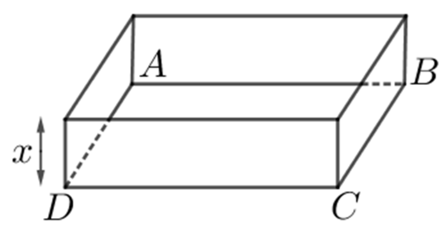
$\boldsymbol{f'(a)=\dfrac{-3}{a^2}}$

On retrouve bien le résultat obtenu par la première méthode.

Exercice 2

$15\ cm$ par $8\ cm$, on note x la longueur en cm du côté des carrés découpés :





1. **Justifier que : $\mathbf{0 \leqslant x \leqslant 4}$.**
D'une part : x est une distance donc $x \geqslant 0$. D'autre part on a $AB \geqslant 0$ et $AD \geqslant 0$ donc :

$$\begin{cases} 15-2x \geqslant 0 \\ 8-2x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15 \geqslant 2x \\ 8 \geqslant 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant \dfrac{15}{2} \\ x \leqslant \dfrac{8}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 7{,}5 \\ x \leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \leqslant 4$$

On a simultanément : $0 \leqslant x$ et $x \leqslant 4$ ce qui revient à dire : $\mathbf{0 \leqslant x \leqslant 4}$.

2. **Montrer que pour tout $x \in [0;4]$, $V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$.**
Le volume d'un parallélépipède rectangle est : $\mathcal{V} = aire\ d'une\ base \times hauteur$,
donc :

$$V(x) = (15-2x)(8-2x)x = (120 - 30x - 16x + 4x^2)x = x(4x^2 - 46x + 120)$$
$$= 4x^3 - 46x^2 + 120x$$

On a donc bien , pour tout $x \in [0;4]$, $\boldsymbol{V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x}$.

3. **Calculer $V'(x)$, en déduire les variations de la fonction V sur l'intervalle $[0;4]$.**
Pour tout $x \in [0;4], V(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$.
Les formules de dérivation donnent immédiatement : $\forall x \in [0;4]$: $V'(x) = 4 \times 3x^2 - 46 \times 2x + 120$
c'est-à-dire : $\boldsymbol{V'(x) = 12x^2 - 92x + 120}$.
$12x^2 - 92x + 120$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 12$, $b = -92$ et $c = 120$, de discriminant :
$\Delta = (-92)^2 - 4(12)(120) = 2\,704$
$\Delta > 0$ donc l'expression $12x^2 - 92x + 120$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+92-\sqrt{2704}}{2(12)} = \frac{92-52}{24} = \frac{5}{3}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+92+\sqrt{2704}}{2(12)} = \frac{92+52}{24} = \frac{144}{24} = \frac{12\times 12}{12 \times 2} = \frac{12}{2} = 6$$

<u>Rappel</u> : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines »
On en déduit que :
- $V'(x)$ est positive ou nulle sur $\left[0;\frac{5}{3}\right]$, donc : **$V$ est croissante sur $\left[0;\frac{5}{3}\right]$**
- $V'(x)$ est négative ou nulle sur $\left[\frac{5}{3};4\right]$, donc : **$V$ est décroissante sur $\left[\frac{5}{3};4\right]$**

4. **Pour quelles dimensions de la boîte, longueur et largeur, son volume est-il maximal ?**
Donner la valeur exacte du volume maximal puis l'arrondi à $0{,}1\ cm^3$.
L'étude des variation de V sur $[0;4]$ montre que V admet un maximum absolu sur cet intervalle atteint pour $x = \frac{5}{3}$, or :

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4\left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46\left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2\,450}{27}$$

donc le **volume maximal est $\boldsymbol{\frac{2450}{27}\ cm^3}$** donc environ $\mathbf{90{,}7\ \boldsymbol{cm^3}}$, atteint pour $x = \frac{5}{3}$.
Lorsque le volume maximal est atteint :
- la longueur L de la boite est, en cm : $L = 15 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{45}{3} - \frac{10}{3} = \frac{35}{3}$

$\boldsymbol{L = \frac{35}{3}\ cm}$ donc **environ $\mathbf{11{,}7}\ \boldsymbol{cm}$**

- la largeur ℓ de la boite est alors, en cm : $\ell = 8 - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{24}{3} - \frac{10}{3} = \frac{14}{3}$

$\boldsymbol{\ell = \frac{14}{3}\ cm}$ donc **environ $\mathbf{4{,}7}\ \boldsymbol{cm}$**

- la hauteur h de la boite est alors : $\boldsymbol{h = \frac{5}{3}\ cm}$ donc **environ $\mathbf{1{,}7}\ \boldsymbol{cm}$**.

Exercice 3

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. **Déterminer $f'(x)$.**
   $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$
   Les formules de dérivation donnent :
   $f'(x) = 3x^2 - 4 \times 2x + 2$
   $f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$
   Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 8x + 2.$

2. **Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A.**
   La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ (cours),
   Pour $a = 2$ on obtient : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.
   Or,
   $f'(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 2 = 3 \times 4 - 16 + 2 = 12 - 14 = -2$
   $f(2) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = (2)^3 - 4(2)^2 + 2(2) + 3 = 8 - 16 + 4 + 3 = 15 - 16 = -1$
   Donc T admet pour équation :
   $$y = -2(x-2) + (-1)$$
   $$y = -2x + 4 - 1$$
   $$y = -2x + 3$$
   Conclusion : l'équation réduite de T est $\boldsymbol{y = -2x + 3}$.

3. **Déterminer les coordonnées de $B \in \mathcal{C}_f$ et distinct de A, en lequel la tangente est parallèle à T.**
   Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur ; or, le coefficient directeur d'une tangente est le nombre dérivé de l'abscisse du point correspondant de la courbe, et comme le coefficient directeur de Test -2 il s'agit de résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ l'équation : $f'(x) = -2$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 8x + 2$, donc il faut résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$: $3x^2 - 8x + 2 = -2$, autrement dit : $3x^2 - 8x + 4 = 0$.
   $3x^2 - 8x + 4$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -8$ et $c = 4$, de discriminant :
   $$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(3)(4) = 64 - 48 = 16$$
   $\Delta > 0$ donc $3x^2 - 8x + 4$ admet deux racines réelles distinctes :
   $$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+8 - \sqrt{16}}{2(3)} = \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
   $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+8 + \sqrt{16}}{2(3)} = \frac{8+4}{6} = \frac{12}{6} = 2$$
   Or, $x_A = 2$ donc : $x_B = \frac{2}{3}$ puis :
   $$y_B = f(x_B) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{77}{27}$$
   Finalement :
   $$\boldsymbol{B\left(\frac{2}{3}; \frac{77}{27}\right)}$$

Exercice 4

On admet que, pour tous réels a et b, on a : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

1. **Montrer que, pour tout réel x, on a : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$.**
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
   Conclusion : $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$.

2. En déduire que, pour tout réel x, on a : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$.

Résumons : $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$.

On en déduit : $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$, puis : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

<u>Conclusion</u> :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, \mathbf{cos}^2(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{1} + \mathbf{cos}(\mathbf{2}\boldsymbol{x})}{\mathbf{2}}$$

3. À l'aide de la formule obtenue à la question 2. déterminer la valeur exact de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

si $x = \frac{\pi}{8}$ la formule précédente donne :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \quad ou \quad \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

Or, une lecture graphique sur le cercle trigonométrique montre que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc :

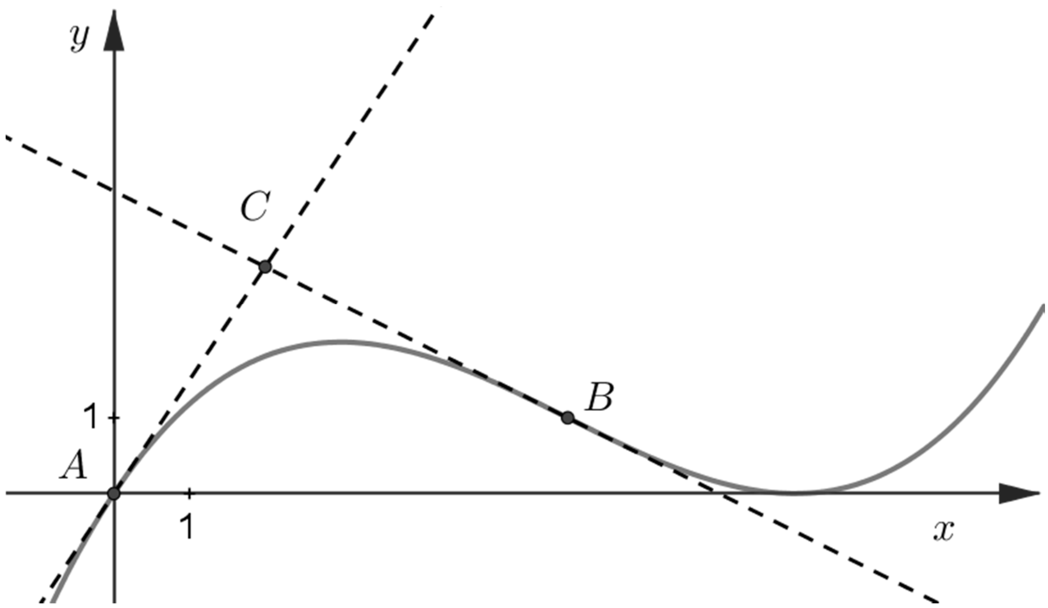
$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Finalement :

$$\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{8}}\right) = \frac{\sqrt{\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{2}}}}{\mathbf{2}}$$

<u>**Exercice 5**</u>

f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et on donne $A(0;0)$, $B(6;1)$ et $C(2;3)$, les points A et B appartiennent à $\mathcal{C}_f$ et les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en A et B sont respectivement les droites (AC) et (BC) :



1. Justifier que $\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$.

$f(0) = f(x_A) = y_A = 0$, or $f(0) = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = d$ donc $\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$.

2. Déterminer les coefficients $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$.

Remarquons d'abord que d étant égal à 0 on a, pour tout réel x : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

$f'(0) = \text{coefficient directeur de } (AC) = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{3-0}{2-0} = \dfrac{3}{2}$

Or, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ donc $f'(0) = c$, d'où $\boldsymbol{c = \dfrac{3}{2}}$

$\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + \dfrac{3}{2}x}$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + \dfrac{3}{2}$

$B(6;1) \in \mathcal{C}_f$ donc $f(6) = 1$, or $f(6) = a(6)^3 + b(6)^2 + \frac{3}{2}(6) = 216a + 36b + 9$

donc : $216a + 36b + 9 = 1$, c'est-à-dire : $216a + 36b = -8$, puis en divisant chaque membre par 4 :

$\boldsymbol{54a + 9b = -2}$

$f'(6) = \text{coefficient directeur de } (BC) = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{3-1}{2-6} = \dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$

Or, $f'(6) = 3a(6)^2 + 2b(6) + \dfrac{3}{2}$ donc :

$$108a + 12b + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 108a + 12b = -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{54a + 6b = -1}$$

On obtient donc le système :

$$\begin{cases} 54a + 9b = -2 \\ 54a + 6b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54a + 9b = -2 \\ 3b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54a + 9b = -2 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54a + 9\left(-\dfrac{1}{3}\right) = -2 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 54a - 3 = -2 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54a = 1 \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{54} \\ b = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Finalement :

$$\boldsymbol{a = \frac{1}{54}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{3}{2}, d = 0}$$

3. On a, pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{54}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x$$

Donc, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{1}{54} \times 3x^2 - \frac{1}{3} \times 2x + \frac{3}{2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$$

La tangente est horizontale (parallèle à l'axe des abscisses) si et seulement si son coefficient directeur est nul : il s'agit donc de résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

$\frac{1}{18}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$ est de la forme $a'x^2 + b'x + c' = 0$ avec $a' = \frac{1}{18}$, $b' = -\frac{2}{3}$ et $c' = \frac{3}{2}$, de discriminant :

$$\Delta = b'^2 - 4a'c' = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{18}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{9}$$

$\Delta > 0$ donc $\frac{1}{18}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{2a'} = \frac{+\frac{2}{3} - \frac{1}{3}}{2\left(\frac{1}{18}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \times \frac{9}{1} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{2a'} = \frac{+\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{2\left(\frac{1}{18}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 1 \times \frac{9}{1} = 9$$

Conclusion

Il y a exactement deux points de $\mathcal{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale, leurs abscisses sont respectivement égales à 3 et 9.